**Теорема 3.** *Компактные псевдо-римановы пространства, которые не являются Эйнштейновыми, тензор Риччи которых образует положительно (или отрицательно) определенную форму, не допускают конформные отображения на пространства Эйнштейна.*

The paper was supported by the grant IGA Faculty of Science 2017012 Mathematical Structures of the Palacky University and the project No. LO1408, AdMas UP—Advanced Materials, Structures and Technologies (supported by the Ministry of Education, Youth and Sports under the National Sustainability Programme I), Brno University of Technology.

## Литература

1. Петров А. З. *Новые методы в теории относительности.* – М.: Наука, 1965. – 495с.

2. Mikeš J., et al. *Differential geometry of special mappings.* – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015. – 566p.

3. Микеш Й., Гаврильченко М. Л., Гладышева Е. И. *О конформных ототбражениях на пространства Эйнштейна.* // Вестник Моск. ун-та. – 1994. – № 3. – С. 13–17.

4. Евтушик Л. Е., Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И., Микеш Й. *Конформных ототбражения на пространства Эйнштейна.* // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 10. – С. 8–13.

5. Yano K., Bochner S. *Curvature and Betti numbers.* – Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1953. – 190p.

CONFORMAL MAPPINGS ONTO COMPACT EINSTEIN SPACES

I. Hinterleitner, N.I. Guseva, J. Mikes

*We formulate certain results of conformal mappings of compact pseudo-Riemannian spaces onto Einstein spaces.*

**Keywords**: Conformal mappings, Einstein spaces, compact spaces.

УДК 514.762; 514.82

# О ПРИЧИННОЙ СТРУКТУРЕ РАССЛОЕННЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Т.А. Гончар[1], Е.И. Яковлев[2]

1 *gonchar.t.a@yandex.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики

2 *evgeniy.yakovlev@itmm.unn.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики

*Исследуется главное расслоение с заданной на его тотальном пространстве лоренцевой метрикой,инвариантной относительно действия структурной группы. Эта конструкция индуцирует лоренцеву геометрию на базе расслоения. Получены некоторые связи между причинными свойствами указанных лоренцевых многообразий.*

**Ключевые слова**: Главное расслоение, G-связность, лоренцево многообразие, причинность.

Пусть $\xi = (E, p, B, G)$ — гладкое главное расслоение с проекцией $p : E \to B$ и структурной группой $G$, $\dim B = n$, $\dim G = k$, $\dim E = m = n+k$. Предположим, что на многообразии $E$ задана лоренцева метрика $g$, инвариантная относительного действия группы $G$ на $E$. Предположим, что слои расслоения $\xi$ пространственноподобны относительно $g$.

Обозначим символом $V_v$ вертикальное подпространство касательного пространства $T_vE$, состоящее из векторов, касающихся слоя $G_v = p^{-1}(b)$, $b = p(v)$. При этом ортогональное дополнение $H_v$ к подпространству $V_v$ в псевдоевклидовом пространстве $(T_vE, g_v)$ имеет размерность $k$. Соответствие $H : v \to H_v$ является $G$-связностью на $E$. Пусть $\omega$ — форма связности $H$.

Рассмотрим точку $b \in B$ и касательные векторы $X, Y \in T_bB$. Для произвольной точки $v \in p^{-1}(b)$ и горизонтальных лифтов $X_v^*, Y_v^*$ векторов $X, Y$ в точку $v$ относительно $H$ положим

$$h(X, Y) = g(X_v^*, Y_v^*).$$

Этим определена лоренцева метрика $h$ на многообразии $B$.

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$. Если $P, Q \in \mathfrak{g}$, то им соответствуют фундаментальные векторные поля $P^*, Q^*$ на E. Для произвольной точки $v \in E$ положим $\gamma_v(P, Q) = g(P_v^*, Q_v^*)$. Очевидно, что $\gamma_v$ — евклидова метрика на алгебре $\mathfrak{g}$. При этом для всех $a \in G$ имеет место равенство $\gamma_{v\cdot a}(P, Q) = \gamma_v(\mathrm{ad}(a)P, \mathrm{ad}(a)Q)$.

Для произвольных $\bar{X}, \bar{Y} \in T_vE$

$$g(\bar{X}, \bar{Y}) = \gamma_v(\omega(\bar{X}), \omega(\bar{Y})) + p^* h(\bar{X}, \bar{Y}).$$

Евклидова метрика на алгебре $\mathfrak{g}$ определяет левоинвариантную риманову метрику на группе $G$. Соответствие между ними взаимно однозначно, поэтому их обычно отождествляют. Поэтому $\gamma_v$ одновременно обозначает как евклидову метрику на $\mathfrak{g}$, так и соответствующую ей левоинвариантную риманову метрику на $G$.

Рассмотрим произвольный кусочно гладкий путь $\bar{x} : I \to E$, $I = [0, 1]$. Положим $x = p \circ \bar{x}$ и обозначим символом $x^*$ горизонтальный лифт пути $x$ относительно связности $H$. Так как $p \circ \bar{x} = p \circ x^*$, то найдется кусочно гладкий путь $z : I \to G$, удовлетворяющий равенству $\bar{x}(t) = x^*(t) \cdot z(t)$ для всех $t \in I$. Такое представление будем называть горизонтально-вертикальным разложением пути $\bar{x}$.

Предположим, что $O$ – временная ориентация лоренцева многообразия $(B, h)$, то есть непрерывное времениподобное векторное поле на $B$, а $O^*$ – горизонтальный лифт поля $O$ относительно $G$-связности $H$. Тогда векторное поле $O^*$ также непрерывно. Будем считать, что многообразие $(E, g)$ ориентированно во времени векторным полем $O^*$.

Нашей целью является установление связи между причинными структурами многообразий $(E, g)$ и $(B, h)$. В случае, когда группа $G$ абелева, некоторые результаты в этом направлении были получены в работах [1], [2] и [3]. Они были использованы в двухточечных краевых задачах для гироскопических систем с многозначным функционалом действия, в том числе, для исследования динамики заряженных частиц в гравитационных и электромагнитных полях черных дыр. Здесь предполагается, что $G$ — произвольная связная группа Ли.

**Предложение 1.** *Рассмотрим кусочно гладкий путь $\bar{x} : I \to E$, его проекцию $x = p \circ \overline{x}$ и горизонтально-вертикальное разложение $\bar{x} = x^* \cdot z$ относительно $G$-связности $H$. Путь $\bar{x}$ непространственноподобен (времениподобен) тогда и только тогда, когда* *непространственноподобен (времениподобен) путь* $x$ *и* $\gamma_{\bar{x}(t)}(dz/dt, dz/dt) \leq |dx/dt|_h$ $(\gamma_{\bar{x}(t)}(dz/dt, dz/dt) < |dx/dt|_h)$ *для всех* $t \in I$.

Лоренцево многообразие принято называть причинным (хронологическим), если оно не содержит замкнутых непространственноподобных (времениподобных) кривых. Из предложения 1 немедленно следует

**Предложение 2.** *Если базовое лоренцево многообразие* $(B, h)$ *является причинным (хронологическим), то и расслоенное лоренцево многообразие* $(E, g)$ *будет причинным (хронологическим).*

Открытое подмножество $U$ лоренцева многообразия считается причинно выпуклым, если произвольная непространственноподобная кривая данного многообразия либо не имеет с $U$ общих точек, либо пересекается с ним по связному множеству. Лоренцево многообразие называется сильно причинным, если каждая его точка имеет базу окрестностей, каждая из которых является причинно выпуклым множеством. Это свойство равносильно тому, что топология многообразия совпадает с топологией Александрова, базу которой образуют множества вида $I^+(u) \cap I^-(v)$, где $I^+(u)$ – хронологическое будущее точки $u$, а $I^-(v)$ – хронологическое прошлое точки $v$ [4].

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть лоренцево многообразие* $(B, h)$ *сильно причинно и структурная группа* $G$ *компактна. Тогда расслоенное лоренцево многообразие* $(E, g)$ *также является сильно причинным.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00312а).

## Литература

1. Яковлев Е. И. *Двухточечные краевые задачи в релятивистской динамике* // – Матем. заметки – 1996. –Т. 59. –№3. –С. 437–449.

2. Яковлев Е. И. *О существовании решений двухточечных краевых задач для гироскопических систем релятивистского типа* // Алгебра и анализ –1997. –Т. 9 –№ 2 –С. 256–271.

3. Яковлев Е. И. *Расслоения и геометрические структуры, ассоциированные с гироскопическими системами* // Современная математика. Фундаментальные направления –2007. –Т. 22. –С. 100–126.

4. Эрлих Б. Д. *Глобальная лоренцева геометрия* –М.: Мир, 1985. –400 с.

ABOUT CAUSAL STRUCTURE OF BUNDLED LORENTZIAN MANIFOLDS

T.A. Gonchar, E.I. Yakovlev

*A principal G-bundle with G-invariant spacetime metric on its total space is investigated. This construction induces the Lorentzian geometry on the base of the bundle. Some links between the causal properties of these Lorentz manifolds are obtained.*

**Keywords**: Principal bundle, G-connection, Lorentzian manifold, Causality.